EJERCICIO 1. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Determina las clases de equivalencia distintas de R:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad R = \{(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)\}.$$

Solución. Consideremos elemento por elemento

- Para $0 \in A$, tenemos $0 \sim 0$, $0 \sim 4$, por lo tanto,
$$[0] = \{0, 4\}$$
- Para $1 \in A$, tenemos $1 \sim 1$, $1 \sim 3$, por lo tanto,
$$[1] = \{1, 3\}$$
- Para $2 \in A$, tenemos que $2 \sim 2$, por lo tanto,
$$[2] = \{2\}$$
- Para $3 \in A$, como $3 \sim 1$, entonces,
$$[3] = [1] = \{1, 3\}$$
- Para $4 \in A$, como $4 \sim 0$, entonces,
$$[4] = [0] = \{0, 4\}$$

Por tanto, las clases de equivalencia (distintas) son

$$[0] = [4] = \{0, 4\}, \qquad [1] = [3] = \{1, 3\}, \qquad [2] = \{2\}.$$

Así, el conjunto cociente es

$$A/\!\sim\, = \big\{\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}\big\}.$$

□

EJERCICIO 2. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Determina las clases de equivalencia distintas de R:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad R = \{(a, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b), (d, d)\}.$$

Solución. Consideremos elemento por elemento

- Para $a \in A$, tenemos $a \sim a$, y no se relaciona con otros, por lo tanto,
$$[a] = \{a\}.$$

- Para $b \in A$, tenemos $b \sim b$, $b \sim d$, por lo tanto,

$$[b] = \{b, d\}.$$

- Para $c \in A$, tenemos $c \sim c$, y no se relaciona con otros, por lo tanto,

$$[c] = \{c\}.$$

- Para $d \in A$, como $d \sim b$, entonces

$$[d] = [b] = \{b, d\}.$$

Por tanto, las clases de equivalencia (distintas) son

$$[a] = \{a\}, \qquad [b] = [d] = \{b, d\}, \qquad [c] = \{c\}.$$

Así, el conjunto cociente es

$$A/\!\sim\, = \big\{\{a\},\ \{b, d\},\ \{c\}\big\}.$$ □

EJERCICIO 3. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Determina las clases de equivalencia distintas de R:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}, \quad xRy \iff 4 \mid (x - y).$$

Solución. La relación es congruencia módulo 4: $x \sim y \iff x \equiv y \pmod 4$. Consideremos representantes y sus clases:

- Para $1 \in A$,
$$[1] = \{1, 5, 9, 13, 17\}.$$
- Para $2 \in A$,
$$[2] = \{2, 6, 10, 14, 18\}.$$
- Para $3 \in A$,
$$[3] = \{3, 7, 11, 15, 19\}.$$
- Para $4 \in A$,
$$[4] = \{4, 8, 12, 16, 20\}.$$

Todos los demás elementos $5, \dots, 20$ pertenecen a una de las clases anteriores según su resto módulo 4. Así, las clases de equivalencia (distintas) son exactamente las cuatro listadas y

$$A/\!\sim\, = \big\{\{1, 5, 9, 13, 17\}, \{2, 6, 10, 14, 18\}, \{3, 7, 11, 15, 19\}, \{4, 8, 12, 16, 20\}\big\}.$$ □

EJERCICIO 4. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Determina las clases de equivalencia distintas de R:

$$A = \{(1, 3), (2, 4), (-4, -8), (3, 9), (1, 5), (3, 6)\}, \quad (a, b)R(c, d) \iff ad = bc.$$

Solución. La relación $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ clasifica por razón $a:b$ (proporcionalidad). Verifiquemos por elementos:

- Para $(1,3)$, se tiene $(1,3) \sim (3,9)$ (pues $1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$), y no es equivalente a los demás listados. Entonces
$$[(1,3)] = \{(1,3),(3,9)\}.$$
- Para $(2,4)$, se tiene $(2,4) \sim (-4,-8)$ y $(2,4) \sim (3,6)$ (pues $2 \cdot (-8) = 4 \cdot (-4)$ y $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$). Así,
$$[(2,4)] = \{(2,4),(-4,-8),(3,6)\}.$$
- Para $(1,5)$, no es equivalente a ninguno de los otros pares, por lo tanto
$$[(1,5)] = \{(1,5)\}.$$

Por tanto, las clases de equivalencia (distintas) son

$$\{(1,3),(3,9)\}, \qquad \{(2,4),(-4,-8),(3,6)\}, \qquad \{(1,5)\},$$

y el cociente es

$$A/\!\sim\, = \big\{\{(1,3),(3,9)\},\ \{(2,4),(-4,-8),(3,6)\},\ \{(1,5)\}\big\}.$$ □

EJERCICIO 5. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Determina las clases de equivalencia distintas de R:

$$X = \{a,b,c\} \quad A = \mathcal{P}(X), \quad URV \iff |U| = |V|$$

Solución. Aquí $A = \mathcal{P}(X)$ y $U \sim V \iff |U| = |V|$. Las clases vienen dadas por la cardinalidad.

- Subconjuntos de tamaño 0:
$$[\varnothing] = \{\varnothing\}.$$
- Subconjuntos de tamaño 1:
$$[\{a\}] = \big\{\{a\},\{b\},\{c\}\big\}.$$
- Subconjuntos de tamaño 2:
$$[\{a,b\}] = \big\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\big\}.$$
- Subconjuntos de tamaño 3:
$$[\{a,b,c\}] = \big\{\{a,b,c\}\big\}.$$

Por tanto, las clases de equivalencia (distintas) son las cuatro anteriores y

$$A/\!\sim\, = \big\{\{\varnothing\},\ \{\{a\},\{b\},\{c\}\},\ \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\},\ \{\{a,b,c\}\}\big\}.$$ □