Ejercicio 1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones sobre A, definidas por:

I. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

II. $R_2 = \{(1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

III. $R_3 = \{(1, 1), (2, 2)\}$.

IV. $R_4 = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Determine si cada una de las relaciones son reflexivas. Represéntelas en forma matricial.

Solución.

I. La relación R_1 es reflexiva, pues se tiene que todo elemento de A está relacionado consigo mismo y su representación matricial está dada por

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. La relación R_2 es reflexiva, pues se tiene que todo elemento de A está relacionado consigo mismo y su representación matricial está dada por

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. La relación R_3 no es reflexiva, pues el elemento 3 no está relacionado consigo mismo, es decir, $(3, 3) \notin R_3$. La representación matricial de R_3 está dada por

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. La relación R_4 no es reflexiva, pues el elemento 2 no está relacionado consigo mismo, es decir, $(2, 2) \notin R_4$. La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Ejercicio 2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones sobre A, definidas por:

I. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

II. $R_2 = \{(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

III. $R_3 = \{(1,3),(3,1)\}$.

IV. $R_4 = \{(1,1),(1,2)\}$.

Determine si cada una de las relaciones son simétricas. Represéntelas en forma matricial.

Solución.

I. La relación R_1 es simétrica, pues para todo elemento $x, y \in A$ se tiene que $(x,y) \in R_1$ implica que $(y,x) \in R_1$. La representación matricial de R_1 está dada por

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. La relación R_2 no es simétrica, pues $(1,3) \in R_2$, pero $(3,1) \notin R_2$. La representación matricial de R_2 está dada por

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. La relación R_3 es simétrica, pues para todo elemento $x, y \in A$ se tiene que $(x,y) \in R_3$ implica que $(y,x) \in R_3$. La representación matricial de R_3 está dada por

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. La relación R_4 no es simétrica, pues $(1,2) \in R_4$, pero $(2,1) \notin R_4$. La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

EJERCICIO 3. Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y las relaciones sobre A, definidas por:

I. $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

II. $R_2 = \{(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

III. $R_3 = \{(1,3),(3,1)\}$.

IV. $R_4 = \{(1,1),(1,2)\}$.

Determine si cada una de las relaciones son antisimétricas. Represéntelas en forma matricial.

Solución.

I. La relación R_1 es antisimétrica, pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_1$ y $(y, x) \in R_1$ implica $x = y$. La representación matricial de R_1 está dada por

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. La relación R_2 es antisimétrica, pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_2$ y $(y, x) \in R_2$ implica $x = y$. La representación matricial de R_2 está dada por

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. La relación R_2 no es antisimétrica, pues $(1, 3) \in R_2$ y $(3, 1) \in R_2$, pero $1 \neq 3$. La representación matricial de R_3 está dada por

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. La relación R_4 es antisimétrica, pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_4$ y $(y, x) \in R_4$ implica $x = y$. La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

EJERCICIO 4. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones sobre A, definidas por:

I. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

II. $R_2 = \{(1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

III. $R_3 = \{(1, 3), (3, 1)\}$.

IV. $R_4 = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Determine si cada una de las relaciones son transitivas. Represéntelas en forma matricial.

Solución.

I. La relación R_1 es transitiva, pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_1$ y $(y, z) \in R_1$ implica $(x, z) \in R_1$. La representación matricial de R_1 está dada por

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. La relación R_2 es transitiva, pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_2$ y $(y,z) \in R_2$ implica $(x,z) \in R_2$. La representación matricial de R_2 está dada por

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. La relación R_3 no es transitiva, pues $(1,3) \in R_3$ y $(3,1) \in R_3$, pero $(1,1) \notin R_3$. La representación matricial de R_3 está dada por

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. La relación R_4 es transitiva, pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_4$ y $(y,z) \in R_4$ implica $(x,z) \in R_4$. La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

EJERCICIO 5. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, considere las siguientes relaciones sobre A:

I. $R_1 = \{(1,1),(1,2)\}$.

II. $R_2 = \{(1,1),(2,3),(4,1)\}$.

III. $R_3 = \{(1,3),(2,4)\}$.

IV. $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

V. $R_5 = A \times A$.

Establecer para cada caso si es o no: simétrica, antisimétrica, transitiva y reflexiva. También representar cada relación a través de una matriz.

Solución.

I.

- La relación R_1 no es reflexiva, pues $(2,2) \notin R_1$.
- La relación R_1 no es simétrica, pues $(1,2) \in R_1$, pero $(2,1) \notin R_1$.
- La relación R_1 es antisimétrica pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_1$ y $(y,x) \in R_1$ implica $x = y$.
- La relación R_1 es transitiva pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_1$ y $(y,z) \in R_1$ implica $(x,z) \in R_1$.

La representación matricial de R_1 está dada por

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.

- La relación R_2 no es reflexiva, pues $(2,2) \notin R_2$.
- La relación R_2 no es simétrica, pues $(2,3) \in R_2$, pero $(3,2) \notin R_2$.
- La relación R_2 es antisimétrica pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_2$ y $(y,x) \in R_2$ implica $x = y$.
- La relación R_2 es transitiva pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_2$ y $(y,z) \in R_2$ implica $(x,z) \in R_2$.

La representación matricial de R_2 está dada por

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.

- La relación R_3 no es reflexiva, pues $(2,2) \notin R_3$.
- La relación R_3 no es simétrica, pues $(1,3) \in R_3$, pero $(3,1) \notin R_3$.
- La relación R_3 es antisimétrica pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_3$ y $(y,x) \in R_3$ implica $x = y$.
- La relación R_3 es transitiva pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_3$ y $(y,z) \in R_3$ implica $(x,z) \in R_3$.

La representación matricial de R_3 está dada por

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV.

- La relación R_4 no es reflexiva, pues $(4,4) \notin R_4$.
- La relación R_4 es simétrica, para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_4$ implica $(y,x) \in R_4$.
- La relación R_4 es antisimétrica pues para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x,y) \in R_4$ y $(y,x) \in R_4$ implica $x = y$.

- La relación R_4 es transitiva pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_4$ y $(y, z) \in R_4$ implica $(x, z) \in R_4$.

La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V.

- La relación R_5 es reflexiva, pues, para todo $x \in A$, se tiene que $(x, x) \in R_5$.
- La relación R_5 es simétrica, para todo $x, y \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_5$ implica $(y, x) \in R_5$.
- La relación R_5 no es antisimétrica pues $(1, 2) \in R_5$ y $(2, 1) \in R_5$, pero $1 \neq 2$.
- La relación R_5 es transitiva pues para todo $x, y, z \in A$, se tiene que $(x, y) \in R_5$ y $(y, z) \in R_5$ implica $(x, z) \in R_5$.

La representación matricial de R_4 está dada por

$$M_{R_5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

1. Propiedades de cerradura

Ejercicio 6. Dado el conjunto $A = \{x, y, z\}$ y la relación

$$R = \{(x, y), (y, z), (x, x), (y, y)\},$$

determinar:

I. La relación reflexiva más pequeña que contiene a R.

II. La relación simétrica más pequeña que contiene a R.

III. La relación transitiva más pequeña que contiene a R

Solución.

I. Llamemos R_1 a la relación buscada. Tenemos que

$$\begin{aligned} R_1 &= R \cup \Delta_A \\ &= \{(x, y), (y, z), (x, x), (y, y)\} \cup \{(x, x), (y, y), (z, z)\} \\ &= \{(x, y), (y, z), (x, x), (y, y), (z, z)\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación reflexiva más pequeña que contiene a R es

$$R_1 = \{(x,y),(y,z),(x,x),(y,y),(z,z)\}.$$

II. Llamemos R_2 a la relación buscada. Tenemos que

$$\begin{aligned} R_2 &= R \cup R^{-1} \\ &= \{(x,y),(y,z),(x,x),(y,y)\} \cup \{(y,x),(z,y),(x,x),(y,y)\} \\ &= \{(x,y),(y,z),(x,x),(y,y),(y,x),(z,y)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación simétrica más pequeña que contiene a R es

$$R_2 = \{(x,y),(y,z),(x,x),(y,y),(y,x),(z,y)\}$$

III. Llamemos R_3 a la relación buscada. Tenemos que $R_3 = R \cup R^2 \cup R^3$, además

$$R^2 = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\}$$

y

$$R^3 = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} R_3 &= R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{(x,y),(y,z),(x,x),(y,y)\} \cup \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\} \\ &\quad \cup \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\} \\ &= \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\}. \end{aligned}$$

Así, la relación transitiva más pequeña que contiene a R es

$$R_3 = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z)\}. \qquad \square$$